FISICA GENERALE II – prof. Fabrizio Cei

- Argomento centrale del corso sarà lo studio dell'elettromagnetismo in forma DIFFERENZIALE.

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc} \qquad \Phi_{S\,chiusa}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{S\,chiusa}(\vec{B}) = 0 \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

⇓

da riscrivere in forma differenziale

⇓

ONDE ELETTROMAGNETICHE

N.B. sito del prof.
www.pi.infn.it/~cei
(vedi pag. ⑭)

- Libri consigliati: 1) Fradin, "Le basi dell'elettromagnetismo", ETS
2) Focardi, Massa, ..., "Fisica generale" (elettromagnetismo e onde)

- In elettromagnetismo la quantità di moto cambia:

$$\vec{P}_{tot} = \underbrace{\sum_i (m_i \vec{v}_i)}_{\text{parte legata alla meccanica}} + \underbrace{\vec{P}_{em}(\vec{E},\vec{B})}_{\text{infatti alle onde elettromagnetiche si può associare una QUANTITÀ di MOTO}}$$

prova: esperimento dell'ampolla di vetro con il mercurio, contenente una pastina per metà bianca e metà nera.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Analogamente:

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge (m\vec{v}_i) + \sum_i \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_i \vec{\tau}^{(ext)}$$

($\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$, $\vec{v}_i \wedge (m\vec{v}_i) = 0$)

⇒ in elettromagnetismo: $\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m\vec{v}_i + \vec{L}_{em}$

$$\mathcal{L} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad \text{(lavoro)}$$

$$\mathcal{L}_{tot} = K_f - K_i \qquad K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Al campo elettromagnetico (sia statico sia dinamico) è associata un'energia particolare, l'ENERGIA ELETTROMAGNETICA

$$K_f + K_i = \mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{cons.} + \mathcal{L}_{Non\,cons.} = (-U_f + U_i) + \mathcal{L}_{non\,cons.}$$

$$(K_f + U_f) - (K_i + U_i) = \mathcal{L}_{non\,cons.}$$

$$E_f - E_i = \mathcal{L}_{non\,cons.} \qquad \text{(energia meccanica)}$$

$$E_{elettromagnetica} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Quindi l'energia elettromagnetica va aggiunta per avere l'energia:

$$E = K + U + E_{elettrom.} \left(+ E_{termica} + E_{nucleare}\right)$$

In questo caso si ha che $\mathcal{L}_{non\,cons} = 0$ e $\Delta E = 0$.

— ∘ — ∘ — ∘ — ∘ —

⇒ Lezione del 27/09/11

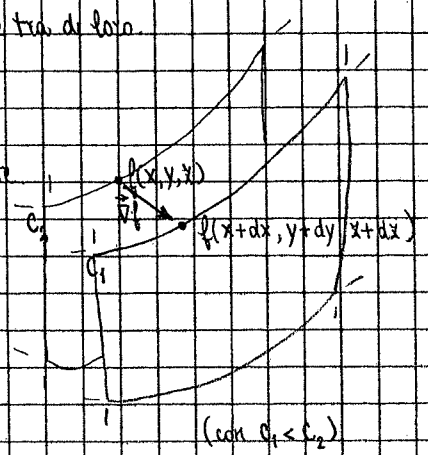
- CAMPO → SCALARE $f = f(x,y,z)$ es U, T, P (pressione)
  → VETTORIALE $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = \vec{A}(x,y,z)$ es $\vec{E}, \vec{B}, \vec{J}$

Per un campo SCALARE si possono definire delle superfici di livello:

$f(x,y,z) = c$ → equazione di una superficie in $\mathbb{R}^3$

Per un campo VETTORIALE abbiamo definito le LINEE di FORZA.

- Supponiamo di avere delle superfici di livello molto vicine tra di loro.
Per queste piccole regioni dello spazio si possono considerare le due superfici alla stessa distanza tra di loro costantemente



$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)dz =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}_{\text{GRADIENTE di } f} d\vec{l} = (\vec{\nabla} f)\cdot d\vec{l}$$

(nabla)

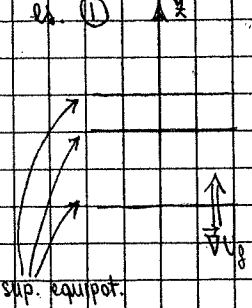
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Il gradiente è un vettore diretto perpendicolarmente alla curva di livello.

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{(operatore nabla)}$$

$$\text{grad } f = \vec{G} = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

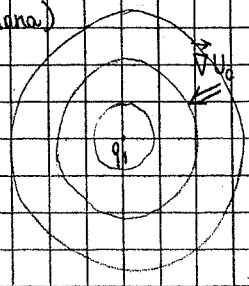
es. ①



$$U_g = mgz \quad \text{(gravitazionale)}$$

$$\vec{\nabla} U_g = (0, 0, mg) = -\vec{F}_g$$

es. ② $U_c = \underbrace{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}}_{\alpha} > 0 \qquad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (coulombiana)



$$\vec{\nabla} U_c = -\frac{\alpha}{R^3}(x, y, z) = -\frac{\alpha \vec{R}}{R^3} = -\frac{\alpha \hat{R}}{R^2} = -\vec{F}_c$$

es ③ $U_{el} = \frac{1}{2} K R^2 = \frac{1}{2} K (x^2 + y^2 + z^2)$ (elastica)

$$\vec{\nabla} U_{el} = (2x, 2y, 2z) \cdot \frac{1}{2} K = K \vec{R} = -\vec{F}_{el}$$

Come si usa il gradiente con le <u>coordinate polari</u>?

$$f(x,y,z) = f(R,\theta,\varphi) = f(r,\varphi,z)$$

coord. cartesiane — coord. pol. sferiche — coord pol. cilindriche

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)\hat{R} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\hat{\varphi}$$ (coordinate polari sferiche)

N.B.: conviene usare il gradiente in coordinate polari soprattutto quando c'è dipendenza solo da R!

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\hat{\varphi} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\hat{z}$$ (coordinate cilindriche)

- DIVERGENZA

Consideriamo la legge di Gauss: $\Phi_{S\,chiusa}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Se consideriamo un campo generico, possiamo scrivere il flusso attraverso una superficie chiusa così:

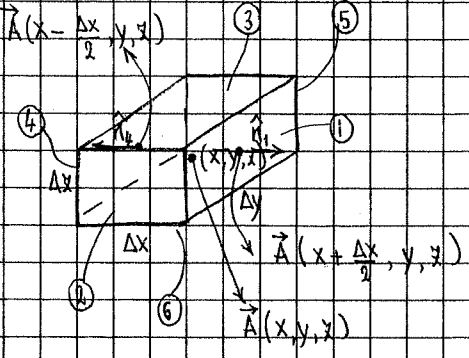
$$\Phi_{S\,chiusa}(\vec{A})$$

Se la superficie è molto piccola si può scrivere il flusso in forma differenziale, per cui prendo un intorno di un punto.

$\hat{n}_1 = (1,0,0)$

attraverso parall. infinitesimo $\hat{n}_4 = (-1,0,0)$

$$\Delta\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$$



$$\Phi_1 + \Phi_4 = \vec{A}\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\hat{n}_1\,\Delta y\,\Delta z + \vec{A}\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)n_4\,\Delta y\,\Delta z =$$

ipotesi: la superficie è così piccola da poter considerare costante $\vec{A}$ su tutta la superficie stessa.

$\vec{A}\cdot\hat{n}_1 = A_x$

$\vec{A}\cdot\hat{n}_4 = A_x$

$$= A_x\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\,\Delta z - A_x\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y\,\Delta z =$$

sviluppo in serie

$$\cong \Delta y\,\Delta z\left[\cancel{A_x(x,y,z)} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} - \cancel{A_x(x,y,z)} - \frac{\partial A_x}{\partial x}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x}\,\Delta V$$

Quindi per questioni di simmetria si ha che:

$$\Delta\Phi = \underbrace{\Phi_1 + \Phi_4}_{\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta V} + \underbrace{\Phi_2 + \Phi_5}_{\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta V} + \underbrace{\Phi_3 + \Phi_6}_{\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta V + \frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta V + \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta V$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

di norma il lim esiste finito o infinito

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

Per un volume infinitesimo il flusso di un vettore $\vec{A}$ è pari al volume per la divergenza di $\vec{A}$.

N.B.: la divergenza è nulla dove non nascono o muoiono linee di forza, mentre è positiva se nascono delle linee e negativa se muoiono.

E se il volume non è infinitesimo, deve essere diviso in tante cubettini infinitesimi, così che:

$$\Phi_{S(V)} = \int_{S(V)} d\Phi = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dV = \int_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV$$

teorema di GAUSS (o della DIVERGENZA)

Quindi per un volume finito il flusso di $\vec{A}$ è uguale all'integrale della divergenza sul volume.

In altre parole: